

Geometría analítica

desde

Salvatore Leo Incarbone

Introducción y notas históricas.

Este breve ensayo tiene un propósito introductorio y didáctico sin excluir la ayuda de un maestro capaz. Se supone un nivel de conocimiento de las reglas de la aritmética y el álgebra. No se requieren de la análisis infinitesimal.

La geometría analítica fue inventada por el filósofo y matemático Descartes y, por lo tanto, también se conoce como geometría cartesiana. Su invención es de gran importancia ya que hace visibles geométrica y figurativamente conceptos y procedimientos algebraicos.

El elemento fundamental del **álgebra** es el **número**, que es una entidad abstracta, y los procesos algebraicos son o fueron esencialmente relaciones entre números realizadas de acuerdo con los principios de la lógica, aunque a veces no sean inmediatamente comprensibles en sus consecuencias.

El elemento fundamental de la **geometría** es en cambio el **punto**. Ésta también es una entidad abstracta pero, en todo caso, está ligada de alguna manera a la intuición y la percepción inmediata: los procedimientos geométricos son relaciones que respetan las necesidades del espacio habitual, por ejemplo, la conservación de longitudes, áreas, volúmenes o el procesamiento figurativo de formas espaciales que suelen ser fácilmente perceptibles, visibles y por lo tanto más fáciles y rápidas de entender.

Visto más de cerca, la invención de Descartes (1596-1642) consiste en relacionar los elementos fundamentales del álgebra, los números, con los elementos fundamentales de la geometría, es decir, los puntos. En cierto sentido, así, el álgebra se vuelve "visible" en el espacio sensible. ¡Casi contemporáneo, Galileo (1564-1642) vio el **libro de la naturaleza** escrito en caracteres geométricos y matemáticos! La relación ideada por Descartes es rigurosa y útil. Un número está relacionado con un punto específico.

De hecho, el número se concibe como una **cantidad** variable que se puede especificar de vez en cuando según a qué se refiera, mientras que el punto se piensa como una **posición** que se puede ocupar en una línea recta.

Descartes establece así una correspondencia arbitraria pero precisa y entre el número x -que puede aumentar o disminuir a voluntad- y un punto P que se mueve progresivamente hacia adelante o hacia atrás en una línea recta.

El Renacimiento europeo galopaba. ¡De hecho, en el mismo período, las "**cualidades primarias**" de Galileo eran medibles, fundamentales para la física de la época, porque podían traducirse en **números y posiciones en el espacio de los instrumentos de observación - como muescas en una escalera!**

Hoy en día, incluso las cualidades secundarias, en ese momento consideradas **engañosas y no medibles**, pueden medirse con los transductores apropiados (por ejemplo, nariz electrónica, micrófono, fotoelementos ...).

Es posible que para Descartes la idea de correspondencia - entre álgebra y geometría - sea una reflexión inspirada en su concepción filosófica del problema del conocimiento que plantea el dualismo no resuelto entre espíritu ("res cogitans") y materia ("res extensa").

El "resuelve" el dualismo entre espíritu y materia recurriendo a la "mente de Dios" que rige y garantiza la correspondencia entre la cosa material y el conocimiento de la cosa misma. De manera similar, de hecho, la geometría y el álgebra permanecen claramente separadas y, sin embargo, se corresponden perfectamente en la mente del matemático; esto parece ser un reflejo de su filosofía dualista.



Históricamente, el uso de coordenadas para determinar una posición en el espacio ya se conocía en la antigüedad, antes de Descartes.

Sin embargo, no se limita a determinar una posición por medio de coordenadas sino que admite un "**lugar geométrico**" y permite que un "lugar geométrico" corresponda a relaciones algebraicas permitiendo así un enorme progreso en matemáticas (un lugar geométrico es un conjunto de puntos que gozan todos de una misma **ley única** como, por ejemplo, los puntos de una circunferencia que son todos equidistante de un centro).

En el mismo período, Galileo también concibió la ley física como una única relación matemática que describe todos los infinitos estados diferentes de un mismo fenómeno natural (por ejemplo, $F = ma$; es decir, fuerza = masa del cuerpo por aceleración).

Sistema de referencia unidimensional.

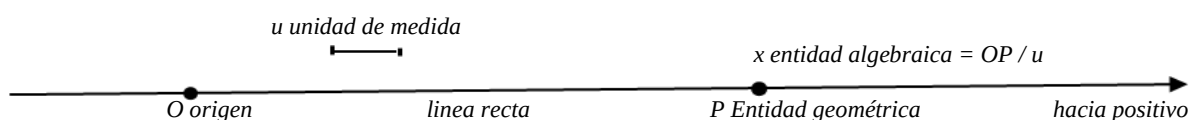
Así nació el **sistema de referencia unidimensional** formado por cuatro elementos elegidos de forma arbitraria.

Una línea elegida arbitrariamente.

Un punto fijo en la línea, elegido arbitrariamente, llamado origen O .

Una unidad de medida elegida arbitrariamente u .

Un verso, llamado positivo, elegido arbitrariamente.



Como consecuencia de estas elecciones arbitrarias, un punto P en la línea puede corresponder a un número x que se determina contando cuántas veces la unidad de medida " u " está en el segmento OP a partir del origen O , es decir, ejecutando la relación $(OP)/u$ y asignando el signo positivo (+) si el punto P está sobre el rayo con origen en O según la dirección elegida; el signo negativo (-) se asigna de otra manera.

Hemos establecido así una "**correspondencia biunívoca**" $P \leftrightarrow x$ entre el punto P y el número x , y **viceversa** entre el número x y el punto P . Esto significa que dado cualquier punto P de la recta, corresponde a un **solo** número x , y viceversa, dado cualquier número x , esto corresponde a un **solo** punto P en la línea. Por lo tanto la correspondencia no sólo es unívoca (es decir, sin ambigüedad) sino también biunívoca (es decir, válida en ambos sentidos) ya que es válida tanto del punto al número como viceversa del número al punto. La línea está orientada (es decir, completa con dirección), numerable punto por punto gracias a u , comenzando desde O , con la dirección elegida. La línea así preparada se denomina "eje de la x " o "eje x " o "eje de abscisas". El número x se llama "abscisa".

Sistema de referencia bidimensional. Coordenadas de un punto.

La correspondencia biunívoca, que hemos visto posible establecer sobre una línea recta, puede extenderse también al caso de los puntos de un plano, adoptando sin embargo algunas modificaciones. Nuevamente tenemos cuatro elementos diferentes, elegidos arbitrariamente.

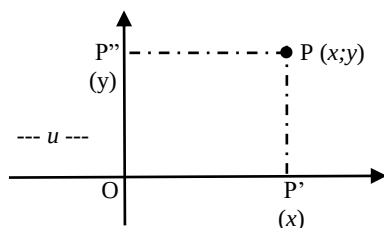
Así nacerá un **sistema de referencia bidimensional**; surgir:

Dos líneas rectas con planos, no paralelos, elegidos arbitrariamente (generalmente perpendiculares entre sí).

Un punto fijo llamado origen O , elegido arbitrariamente (de hecho hay dos orígenes, en las dos líneas, pero aquí son elecciones coincidentes en el punto de intersección de las líneas, por simplicidad).

Dos unidades de medida elegidas arbitrariamente (en matemáticas, generalmente solo se elige una u para ambas líneas).

Dos líneas positivas, elegidas arbitrariamente, una para cada línea.



Como consecuencia de estas elecciones, desde el punto P del plano trazamos dos paralelas hasta encontrarnos con las dos rectas elegidas, llamadas "ejes". Las paralelas se encuentran con los ejes en P' y P'' . Estos dos puntos corresponden respectivamente a los números x e y que se determinan contando cuantas veces la unidad de medida u está en el segmento OP' y, respectivamente, en el segmento OP'' a partir del origen O , es decir ejecutando el relaciones $(OP')/u$ y $(OP'')/u$. Cada vez asignamos el signo positivo (+) si estamos sobre el rayo según la dirección elegida, el signo negativo (-) en caso contrario. Hemos establecido así una "**correspondencia biunívoca**" $P \leftrightarrow (x, y)$ entre el punto P y el par ordenado de números reales x, y . Los números x, y , se llaman "**coordenadas**".

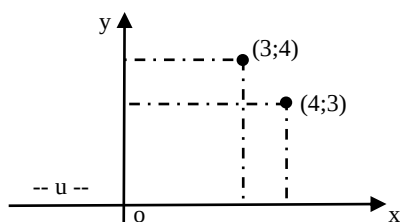
Notemos que dado cualquier punto P en el plano, corresponde a un **solo** par ordenado de números $(x; y)$.

Por el contrario, dado un par ordenado de números reales (x, y) éste corresponderá a un solo punto P del plano.

Por tanto la correspondencia es también en este caso **uno a uno** ya que es válida tanto del punto al par de números como viceversa del par de números al punto. Vemos en efecto que el par de coordenadas $(3; 4)$ no es lo mismo que el par $(4; 3)$ ya que aunque los números son los mismos, están ordenados de manera diferente. Por lo tanto, los dos pares corresponden a dos puntos diferentes en el plano.

Cualquier **par de números reales** siempre identifica un **solo punto** en el plano cartesiano.

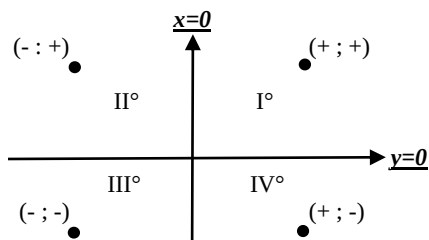
Por el contrario, un **solo par ordenado de números reales** corresponde a un punto en el plano. El primer número se llama "**abscisa**" y el segundo "**ordenada**". Ambos se llaman "**coordenadas**".



Los cuatro cuadrantes del plano de referencia cartesiano. Ecuaciones de los ejes cartesianos.

Los dos ejes x e y del plano cartesiano dan lugar a cuatro cuadrantes:

- en el primer cuadrante (I°), arriba a la derecha, las dos coordenadas son siempre ambas positivas ($++$),
- en el segundo cuadrante (II°), arriba a la izquierda, la abscisa es negativa pero la ordenada es positiva ($- , +$),
- en el tercer cuadrante (III°), en la esquina inferior izquierda, las dos coordenadas son ambas negativas ($- , -$),
- en el cuarto cuadrante (IV°), abajo a la derecha, la abscisa es positiva pero la ordenada es negativa ($+ , -$).



Los cuatro cuadrantes; los signos de sus coordenadas.

Nótese que el eje x se caracteriza por el hecho de que todos sus puntos tienen ordenada cero y por lo que podemos estar de acuerdo en que la ecuación $y = 0$ es la ecuación que corresponde a este eje. De manera similar, el eje y "representa" o "muestra", "hace visible" la ecuación $x = 0$ que se llama ecuación de primer grado porque la variable x tiene un exponente implícito uno (x^1).

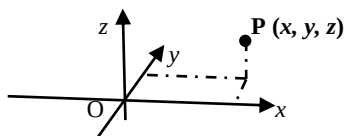
Por lo tanto podemos concluir que **$y = 0$ es la ecuación del eje x .**

Por supuesto, el eje y también tiene una característica similar, solo que se refiere en cambio a la ecuación $x = 0$.

Por tanto, podemos concluir que **$x = 0$ es la ecuación del eje y .**

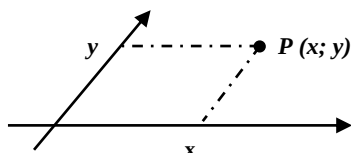
Sistema de referencia tridimensional

La correspondencia biunívoca entre puntos y números también se puede establecer para puntos en el espacio. En este caso cada punto corresponderá a un triplete ordenado de números reales del tipo (x, y, z) . La variable z se llama "cuota". por supuesto las coordenadas hay tres: abscisa x , ordenada y , dimensión z .



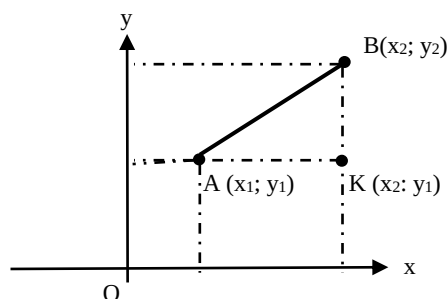
Ejes oblicuos.

En el estudio de cristales y minerales, así como en otros casos, puede ser conveniente utilizar ejes oblicuos, es decir, no perpendiculares entre sí. Los valores de las coordenadas se obtienen geoméricamente trazando adecuadamente las paralelas a los ejes (y no las perpendiculares). Sólo cuando los ejes son perpendiculares entre sí es indiferente trazar las paralelas o perpendiculares a los propios ejes para obtener las coordenadas.



Distancia en el plano cartesiano.

Dados dos puntos A ($x_1; y_1$) y B ($x_2; y_2$) en el plano cartesiano, se puede calcular su distancia conociendo sus coordenadas. Teniendo las coordenadas de los puntos, se puede calcular su distancia. Su distancia se puede calcular con el teorema de Pitágoras.



Aplicando el teorema anterior al triángulo rectángulo ABK, tenemos:

$$AB^2 = AK^2 + BK^2$$

$$\text{pero: } AK = x_2 - x_1$$

$$BK = y_2 - y_1 \text{ por lo tanto:}$$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ de la que uno tiene:}$$

$$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$$

Observamos que las distancias sobre una misma línea horizontal o vertical son simples diferencias (a calcular sobre una sola de las dos coordenadas, X o Y).

Coordenadas del punto medio de un segmento en el plano cartesiano.

Dados los dos puntos extremos P₁ y P₂ de un segmento, el punto medio M del segmento se caracteriza por la igualdad de las distancias de M a los dos extremos. Para simplificar, colocamos los dos extremos en un eje de referencia unidimensional. El punto medio M divide el segmento en partes iguales y eso debe resultar

$$X_M - X_1 = X_2 - X_M$$

$$2 X_M = X_1 + X_2$$

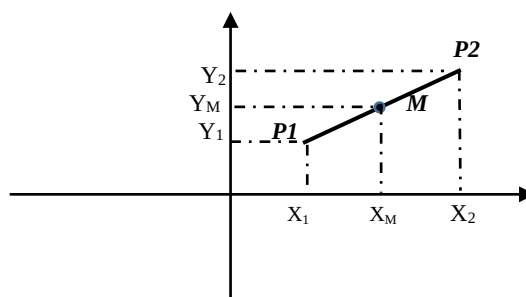
resolviendo con respecto a X_M obtenemos:

y por lo tanto:

$$X_M = (X_1 + X_2) / 2$$

$$Y_M = (Y_1 + Y_2) / 2$$

media de los dos valores de abscisas de los extremos A y B. Análogamente para Y tenemos: promedio de los dos valores de las ordenadas de los extremos A y B.



Conclusión. Las coordenadas del punto medio de un segmento AB se obtienen promediando cada una de las coordenadas de los extremos del segmento, es decir:

$$X_M = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$Y_M = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

Un principio lógico fundamental en álgebra. Manipulación de una igualdad.

Dado que la geometría analítica establece una correspondencia entre el álgebra y la geometría, se entiende que es necesario conocer las reglas fundamentales del álgebra así como poseer claramente algunas nociones básicas de geometría.

La matemática es una ciencia y, como tal, se ocupa de las relaciones entre cantidades o entre formas. En matemáticas, el álgebra es una especie de taquigrafía del pensamiento, ya que te permite representar de forma concisa muchas de las relaciones de las que trata. Fundamental es la relación de **igualdad** que permite expresar un enunciado, una oración. Por lo tanto, le indicamos cómo almacenarlo y usarlo. Por ejemplo, si digo que un número desconocido *x es tres*, puedo escribir $x = 3$. Usar el signo igual es equivalente a usar el verbo ser. El signo igual también se puede usar para declaraciones más complejas. Por ejemplo, si digo que *el doble de un número desconocido es seis*, puedo escribir $2X = 6$. En este caso, el uso del verbo "ser" no revela el número en sí mismo, sino cuál es su doble ("el doble de un número *es* seis"). Surge así el problema de derivar X. Aún más intrincado se presenta el caso en que decimos que *el doble de un número desconocido más 4 es igual a 10*. En este caso el verbo ser está envuelto en una relación más compleja que debe ser desentrañada. La relación es una oración matemática y se puede expresar simbólicamente escribiendo $2X + 4 = 10$.

Esta última escritura tiene la ventaja de que a veces parece más clara porque es más corta.

En todos estos casos es necesario manipular la expresión para aislar la x para convertirla en sujeto de la oración -afirmativa gracias al verbo ser- y así obtener su valor. El símbolo "igual" separa dos miembros entre sí, el primero a la izquierda suele ser el sujeto. El signo igual (=) actúa como el verbo ser y el segundo miembro a la derecha especifica el sujeto o su relación con otros datos.

Es evidente que la manipulación de una igualdad debe respetar y mantener la igualdad misma para preservar la verdad del enunciado mismo incluso ya pesar del posible cambio de sujeto. Supongamos entonces que tenemos una igualdad en la forma más simple posible como por ejemplo $a = b$. Es obvio que si $a = b$, entonces $b = a$. Además, la igualdad sigue siendo válida si ambos miembros se manipulan de la misma manera. Por lo tanto, es evidente que, dada una igualdad, es importante mantener su validez a pesar de cualquier cambio en el resto de la oración algebraica.

Si:	$a = b$
Entonces	$b = a$
además	$a + 1 = b + 1$ (es decir, "a más uno" es igual a "b más uno")
y también	$5a = 5b$ y de manera similar
es también	$-a = -b$ (habiendo multiplicado ambos lados por -1)
y también	$1/a = 1/b$ habiendo operado en ambos miembros, del mismo modo, el recíproco ("uno en a" es igual a "uno en b")
y entonces	$1/(a-1) = 1/(b-1)$ ("uno en a menos uno" es igual a "uno en b menos uno")
o	$(a+3)^2 = (b+3)^2$
Si	$a = b$ entonces si resto b de ambos lados: $a - b = b - b$; y así resulta $a - b = 0$
Si	$a = b$ entonces $a/b = b/b$ y como $b/b = 1$ esta vez resulta: $a/b = 1$
Y así sucesivamente, se mantiene la igualdad cualquier operación se hace perfectamente igual en los dos miembros...	

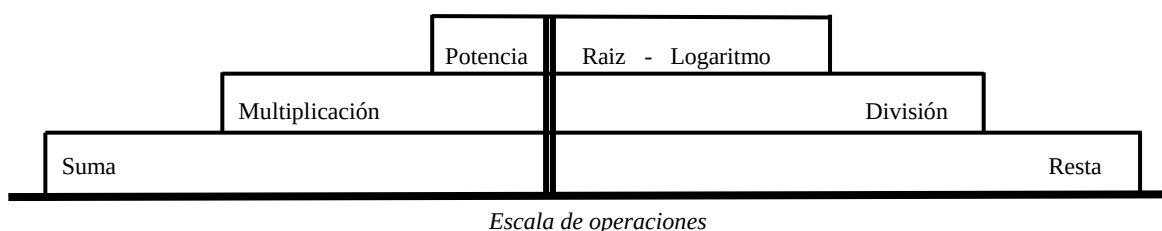
Los últimos dos pasos (que conducen a " $a-b = 0$ " y " $a/b = 1$ ") muestran que un elemento puede anular el igual (=). Es decir, puede cambiar de miembro siempre que la operación aplicada con respecto a él sea inversa. Por lo tanto, cambie los miembros con la operación inversa. Si era para sumar se resta, si era para multiplicar se divide y -viceversa y como se puede comprobar fácilmente - si era para restar se sumaba, si era para dividir se multiplicaba.

En el caso de la potencia hay que recordar que tiene dos operaciones inversas. Si buscamos la base usamos la raíz, si buscamos el exponente usamos el logaritmo. De $x^2 = 9$ pasamos a $x = \sqrt{9}$. De lo contrario, de $3^x = 9$ pasamos a $x = \log_3 9$ que dice: "x es el exponente que se debe dar a 3 para obtener 9". En la práctica, "logaritmo" es sinónimo de "exponente".

Escala de operaciones.

Por lo tanto, las relaciones inversas son de gran importancia. Al respecto, podemos referirnos a la **Escala de operaciones** introducida en otro de nuestros escritos y cuya figura recordamos aquí. Recuerda que solo hay dos operaciones conmutativas: la suma y la multiplicación. Tenga en cuenta que, al ser conmutativos, sus operandos tienen los **mismos nombres** porque es indiferente cuál viene antes y cuál después y, de hecho, se llaman respectivamente "sumandos" para la suma y "factores" para la multiplicación. El poder **no** es conmutativo; de hecho $2^3 = 8$ mientras que intercambiando 2 con 3 tenemos que es $3^2 = 9$ y por lo tanto los operandos tienen una función diferente. Precisamente por eso sus nombres son diferentes: "base" y "exponente". De ahí la necesidad de **dos operaciones inversas**. Si quieres encontrar la **base** de una potencia necesitas la **raíz**. P. ej. $\sqrt{9} = 3$ y leemos: *la raíz cuadrada de 9 es 3*.

Si por el contrario queremos el **exponente** de la potencia entonces necesitamos la operación **logarítmica**. P. ej. $\log_{10} 100 = 2$; (de hecho $10^2 = 100$). El logaritmo es sinónimo de **exponente**. Usando el logaritmo busco el exponente de la potencia (y no la base de la potencia). La oración matemática $\log_{10} 100 = 2$ dice **"el logaritmo de 100 en base 10 es 2"**. Del mismo modo p. ex. $\log_{10} 1000 = 3$; o $\log_3 9 = 2$.



En cualquier expresión, tienen precedencia, del calculo algebraico, las operaciones de mayor escalón, salvo que las de menor rango estén recogidas en corchetes de "contención" que actúan como "bolsas" que encierran las operaciones en él contenidas, dándoles una precedencia que de otro modo no tendrían. P.ej. $2 + 3a^2$ queda indicado así, pero $(2 + 3)a^2 = 5a^2$ porque el paréntesis tiene prioridad. Volvamos a las relaciones que consideramos anteriormente: $2x=6$ y $2x+4=10$. Son informes muy sencillos deliberadamente para facilitar las comprobaciones y hacer más inmediatos los razonamientos y comprobaciones.

Para derivar x de la primera relación, podemos mantener la igualdad y aislar x dividiendo **ambos lados** por dos, obteniendo así: $2x/2 = 6/2$, es decir, $x=3$.

Para derivar x en la segunda relación, podemos mantener la igualdad y aislar x restando 4 de **ambos lados**, obteniendo $2x+4-4=10-4$ que es $2x = 6$. Ahora, dividiendo **ambos lados** por 2, obtenemos $x=3$.

Por lo tanto, un principio lógico fundamental del álgebra es que una igualdad sigue siendo válida si ambos miembros se manipulan de la misma manera sin ambigüedad, incertidumbre u omisiones. P. ej. si $x^2=4y$ queremos encontrar la base x , entonces debemos extraer la raíz cuadrada de ambos miembros y escribir: $x = \sqrt{4} = \pm 2$ para no omitir el posible valor negativo -2.

También recordamos que en la jerga matemática, una "**ecuación**" es una **relación que contiene una incógnita**.

Grado de una ecuación.

Tenga en cuenta que en ambos ejemplos presentados, la incógnita X apareció como una potencia con exponente uno ($X = X^1$).

Sabemos que entre las tres operaciones fundamentales de suma, multiplicación, potencia, la más compleja y alta es la potencia que no es conmutativa y por tanto tiene **dos operaciones inversas** según queramos obtener la **base** (y luego ejecutamos la **raíz**) o el **exponente** (y luego ejecutamos el **logaritmo**). Por lo tanto el exponente con el que aparece la incógnita tiene una gran importancia y obtener la incógnita puede ser particularmente difícil, sin embargo en general es imposible si el exponente es igual o mayor a 5.

"Grado" es el máximo exponente presente en la incógnita x en una relación con la incógnita que aparece con diferentes exponentes enteros $x = x^1, x^2, x^3, x^4, \dots$. Entonces $ax + b = 0$ es una relación $P_1(x) = 0$ llamada "ecuación de **primer grado**".

La relación $ax^2 + bx + c = 0$ es un polinomio $P_2(x) = 0$ igual a cero: se llama "ecuación de **segundo grado**".

La $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ es una ecuación $P_3(x) = 0$ y es de **tercer grado**. Y así.

En el plano cartesiano, los polinomios $y = P_n(x)$ están representados por líneas curvas continuas de **grado n** . Se caracterizan por tener, como máximo, **n intersecciones** reales (puntos en común) con una línea recta. (Grado $\leftrightarrow$ intersecciones).

La ecuación de segundo grado se puede resolver en general. La resolución general implica una manipulación particularmente intrincada pero también bastante instructiva con respecto a los **procedimientos algebraicos** que se pueden utilizar en general y por ello la explicamos a continuación.

q	pq	q ²
p	p ²	pq
	p	q

La figura representa visualmente el cuadrado del binomio $p+q$ calculando el área del cuadrado de lado $p+q$.

Como se puede ver claramente dentro de los cuatro cuadriláteros, el área total está dada por $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$.

En general, cualquier fórmula puede demostrarse o aclararse para que se entienda de muchas maneras diferentes.

Solución algebraica de la ecuación de segundo grado. Discriminante. Los números imaginarios. Número complejo.

La ecuación de segundo grado en su forma más general se puede representar con el trinomio igual a cero:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b, c son "coeficientes" conocidos, es decir parámetros, es decir cantidades numéricas cualesquiera pero supuestamente conocidas, bien determinadas.

(Si el trinomio no fuera igual a cero sino a cualquier número n en el segundo miembro, sería suficiente llevar este último al primer miembro e incorporarlo en el término c para devolver cero al segundo miembro de todos modos).

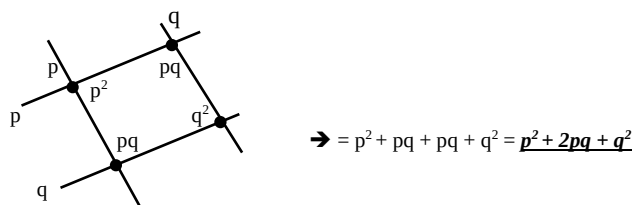
Por supuesto, la incógnita es x . Para obtenerlo debemos extraer la raíz cuadrada de x^2 pero al mismo tiempo debemos poder separar x del segundo término bx . Es decir, deberíamos llegar a la forma en que se aísla la incógnita, a saber, $x = f(a, b, c)$ es decir, por $f()$ un conjunto de operaciones realizadas solo sobre los coeficientes a, b, c liberados de la incógnita.

La ecuación se considera un trinomio ya que está formada por tres "nombres" que se suceden sumados, a saber, ax^2, bx, c .

Como ya hemos visto, el cuadrado de un binomio es: $(p + q)^2 = (p + q)(p + q) = p^2 + pq + pq + q^2 = p^2 + 2pq + q^2$, es decir

"El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primero + el doble producto del primero por el segundo + el cuadrado del segundo" = $p^2 + 2pq + q^2$.

Para tener una idea más inmediata, imaginemos interpretar la operación de suma como un lado a lado de líneas paralelas; la operación del producto como la intersección de líneas rectas. De modo que en consecuencia tendremos que, por ejemplo, el producto de sumas $(p + q)(p + q) = (p + q)^2$ se puede representar como en la figura; este se presta para realizar el cálculo y proporciona el resultado; de hecho, es suficiente leer lo que está escrito en los puntos de intersección (la línea p que corta a otra p da lugar a p^2 , la línea p que en cambio corta a la línea q da lugar a pq).



Puede estar seguro de que la fórmula es "correcta" sometiendo la fórmula a una prueba práctica. Esto, por ejemplo, eligiendo números enteros en lugar de letras. Así que hagamos $p = 2$ y $q = 3$ y tendremos que $(2 + 3)$ por $(2 + 3) = (5 \text{ por } 5) = 25$ debe dar el resultado 25 porque ¡lo sabemos!. Aplicando la fórmula tendremos: $(2 + 3)(2 + 3) = 2^2 + 2 \text{ por } 2 \text{ por } 3 + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$. Por tanto la fórmula parece correcta también porque se comprueba en un caso práctico !...

Observamos que el trinomio antes mencionado ($ax^2 + bx + c$) parecería un cuadrado perfecto - al menos en el primer término ax^2 , si en lugar de "a" estuviera a^2 .

Aprovechando que una igualdad -o una ecuación- sigue siendo válida si ambos miembros se manipulan de la misma manera, multiplicamos ambos miembros por "a", obteniendo: $a^2x^2 + abx + ac = 0a$. Por supuesto $0a = 0$ y por lo tanto $a^2x^2 + abx + ac = 0$.

En este punto observamos que el segundo término abx favorecería un desarrollo cuadrático si pareciera un producto doble, es decir, si apareciera como $2abx$. Sin embargo, no es conveniente multiplicar ambos lados por 2 porque el primer término se convertiría en $2a^2x^2$ y ya no sería un cuadrado perfecto. Un número que se presta a un producto doble y al mismo tiempo a un cuadrado perfecto es el número 4. Luego multiplicamos ambos lados por 4 y obtenemos $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \text{ por } 4$, es decir: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$.

De esta forma hemos obtenido no solo que el primer término $4a^2x^2$ aparece como el cuadrado perfecto de $2ax$, sino que el segundo término aparece como el doble producto de $2ax$ por b , es decir, $2 \text{ por } 2ax (b) = 4abx$.

Tenga en cuenta también que $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$.

Sin embargo, la ecuación equivalente a la de partida ya la que habíamos llegado, es $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ en la que falta el término $+ b^2$. Sin embargo, podemos llegar a añadirlo y quitarlo al mismo tiempo, respetando así la igualdad.

Entonces obtenemos: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$.

Ahora los primeros tres términos forman un cuadrado perfecto y podemos reescribir la expresión en la forma: $(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ y por lo tanto $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$.

La incógnita x ahora está aislada en el paréntesis que se puede obtener como la raíz, siendo esta operación la inversa de la potencia cuando queremos obtener la base. Por lo tanto: $2ax + b = \mp \sqrt{b^2 - 4ac}$. Aislando $2ax$ tenemos $2ax = -b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}$

Y finalmente:

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

resumen del procedimiento:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a^2x^2 + abx + ac &= 0a \quad (0a \text{ significa "cero para a"}) \\ a^2x^2 + abx + ac &= 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \cdot 4 \quad (0 \cdot 4 \text{ significa "cero para 4"}) \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac &= 0 \quad \text{y desde } 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2 \text{ que tienes:} \\ (2ax + b)^2 - b^2 + 4ac &= 0 \quad \text{y por lo tanto } (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \\ 2ax + b &= \mp \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{Habiendo extraído la raíz de ambos miembros;} \\ 2ax &= -b \mp \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{y por lo tanto:} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo $\mp$ indica que hay dos posibles soluciones a las ecuaciones. Una solución se obtiene con el signo "-" y la otra con el signo "+".

Además, la presencia de la raíz implica que el radicando debe ser positivo o nulo; de lo contrario, si fuera negativo, *no tendría sentido realizar la operación de raíz (la raíz cuadrada de un número negativo no existe en el campo de los números reales)*; sin embargo esta eventualidad se subsana utilizando los llamados números “imaginarios” que se obtienen de la siguiente manera; Supongamos que el número N es positivo. En consecuencia $(-N)$ es negativo por hipótesis. Entonces la raíz de $-N$ se puede considerar la raíz de $(-1) N$ que es $\sqrt{-1}\sqrt{N} = \mp i \sqrt{N}$ habiendo establecido “*por definición*”

$$\sqrt{-1} = \mp i$$

La letra “ i ” significa “imaginario” ya que no existe un número real cuyo cuadrado dé lugar a un número negativo.

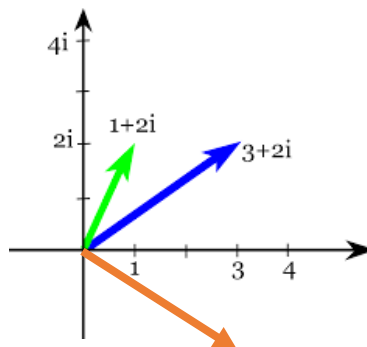
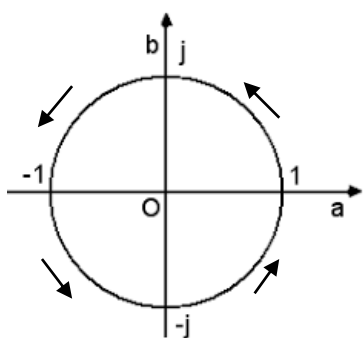
El lector quedará perplejo ante esta “definición” que al principio parece ilusoria o extraña, si no francamente engañosa. Sin embargo, el gran matemático Gauss demostró que mientras los números aumentan de magnitud al sumar 1, la introducción *de la “ i ” imaginaria* se presta a la rotación de la cantidad, es decir, se presta al cálculo vectorial; prueba de ello la encontramos en el cálculo de circuitos eléctricos en los que los números imaginarios juegan un papel fundamental.

Gauss usó el plano cartesiano para ilustrar las posibilidades que ofrecen los números imaginarios.

Se reservó un eje, p. ex. el horizontal a números reales y dedicado el otro eje, vertical, a números imaginarios. En este plano, llamado “*plano de Gauss*” tiene sentido hablar de un número complejo z definido como la suma $z = a + ib$ de una parte real “ a ” más una imaginaria “ ib ”. En la figura de la izquierda, consideramos el punto $(1; 0)$ sobre el eje real (a). Aquí colocamos el número inicial 1. Multiplicando 1 más veces sucesivamente, siempre por “ i ”, obtenemos gradualmente; $1*i = i$; $i*i = -1$; $-1*i = -i$; $-i*i = -(-1) = 1$.

Por lo tanto, hay una rotación que *parte de 1 y regresa a 1* [en la posición $(1; 0)$]. Al rotarlo parte de 1 y pasa a *$i, -1, -i, 1$* , es decir, vuelve al número 1 inicial.

En la figura de la derecha se puede ver que el número complejo $1 + 2i$ (indicado por la flecha verde) está representado por un punto diferente al que representa por ejemplo $3 + 2i$ (flecha azul).



Un número “**complejo**” es la suma de un número real con un número imaginario, es decir, de la forma $a + ib$.
Se dice que dos números complejos están “**conjugados**” si difieren sólo en el signo de la parte imaginaria, es decir, si son $a - ib$ y $a + ib$.
Los números $3 - 2i$ (rojo) y $3 + 2i$ (azul) son dos números complejos conjugados (las partes imaginarias tienen signos opuestos).

El signo (positivo o negativo) de la cantidad bajo la raíz en la solución de la ecuación de segundo grado, por lo tanto, juega un papel decisivo en la determinación de la calidad de las soluciones.

La mencionada cantidad bajo la raíz toma el nombre de “discriminante” y se indica con la letra griega Δ .

Por lo tanto, la fórmula de solución de la ecuación de segundo grado (que representa la *intersección de una parábola con el eje x*) se puede reescribir de la siguiente manera con $\Delta = b^2 - 4ac$:

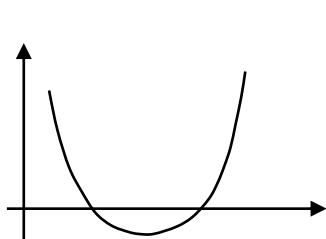
$$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \searrow x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Si el discriminante Δ es positivo, tenemos dos soluciones reales y distintas $x_1 \neq x_2$, y usamos correctamente el signo $\mp$ (“menos o más”); la parábola cruza el eje x en dos puntos distintos.

Si el discriminante Δ es cero, entonces tenemos dos soluciones reales y coincidentes $x_1 = x_2$. La parábola “toca” el eje x al que es tangente en un “punto doble” (es decir, en un solo punto considerado “doble”).

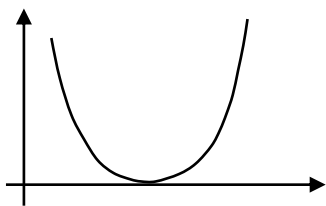
Si el discriminante Δ es negativo, entonces tenemos dos soluciones complejas conjugadas del tipo $z_1 = p - iq$, y $z_2 = p + iq$. La parábola no cruza el eje x en ningún punto “real”.

El **significado geométrico** de los coeficientes a, b, c es naturalmente **diferente** si la ecuación de segundo grado se refiere a diferentes curvas, p. a una **parábola** o una **circunferencia** o **algo** más. P.ej. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ “es la ecuación” de una circunferencia.



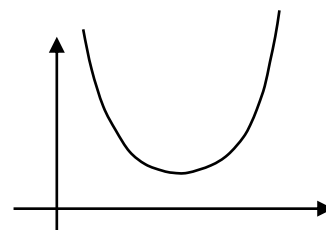
$$\Delta > 0$$

Dos intersecciones reales y distintas.



$$\Delta = 0$$

Dos intersecciones reales y coincidentes.



$$\Delta < 0$$

Dos intersecciones complejas y conjugadas

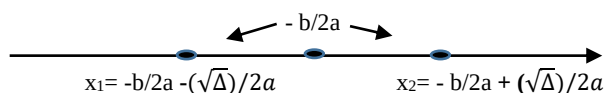
Valor central de las dos soluciones de la ecuación de segundo grado.

Las soluciones vistas arriba también se pueden expresar en forma de dos fracciones:

$$x = -b/2a \mp (\sqrt{\Delta})/2a$$

interpretable como "un número central (-b/2a) menos o más algo (es decir, "menos o más la raíz de...").

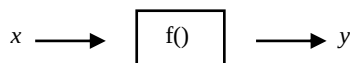
Por lo tanto el valor "-b/2a" representa un valor equidistante entre las dos soluciones x_1 (que se calcula con el signo - y por lo tanto es menor que x_2 que quiere el signo + y por lo tanto es mayor que x_1). Este valor central es también el valor medio de las dos soluciones.



El problema y los resultados algebraicos descritos hasta ahora pueden parecer difíciles, si no abstrusos, pero en cambio pueden ser representados e ilustrados visualmente por medio de la geometría analítica. Anticipamos que el valor central $-b/2a$, en el caso de la parábola, es el valor numérico de la abscisa del vértice y del foco de la parábola con eje de simetría paralelo al eje y .

La línea. La ecuación de primer grado es la ecuación de una recta. vista cartesiana.

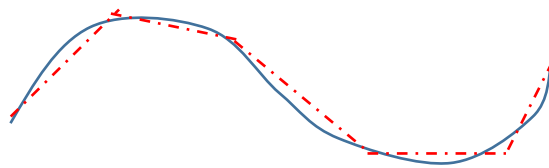
La relación $y = f(x)$ se lee como "y es una función de x". La palabra función implica un "funcionamiento" en el sentido de que una vez que se elige un valor de x, se realizan ciertas operaciones sobre este valor que se procesa para obtener un resultado y. Este tipo de operación en realidad se materializa en una calculadora de escritorio en la que elige un valor x de "entrada" y elige algunas funciones, como sumas o productos, etc., hasta que obtiene un resultado de salida y.



El resultado y obtenido se debe a la elección de la **variable independiente** x y también al tipo de operación $f()$ preparada en la calculadora. Por lo tanto, escribiendo $y = f(x)$ tenemos que **y es la variable dependiente** de las elecciones hechas sobre x y sobre $f()$ que es el tipo de operación impuesta. Por lo tanto la función matemática no es más que un tipo de operación que permite pasar de una variable independiente a otra que depende de nuestras elecciones.

No cabe duda que de todas las funciones posibles, la más sencilla e importante es la que corresponde a una línea y por diversas razones.

1. Es la función más sencilla porque la tendencia es "lineal", es decir, no hay cambios numéricos desordenados ni desviaciones con una tendencia curvilínea más o menos gradual.
2. Su representación cartesiana es una línea recta, sin desviaciones
3. Se aprende fácilmente y se usa de forma natural.
4. Es muy útil y por lo tanto importante para describir un fenómeno, para hacer predicciones como la tendencia de los votos en política, aumento de peso en el campo pediátrico, descripción al menos parcial de fenómenos complejos como en ciencias políticas y sociales, en psicología, biología, física, economía, matemáticas, ...
5. En geometría analítica la recta corresponde a una función de primer grado, es decir del tipo $y = mx + n$ o $ax + by + c = 0$ donde ambas x aparecen con un exponente unitario (i. e. 1).
6. Puede aproximarse, al menos en pequeñas áreas, a casi cualquier otra función aunque esta sea muy variable (en azul); de hecho puede aproximarlo con cierto grado de aproximación por medio de una línea quebrada (en rojo) formada por cierto número de segmentos, cada uno de los cuales es rectilíneo.



Hemos dicho que la ecuación que representa una recta es de primer grado en x e y .

Se puede presentar en forma implícita: $ax+by+c=0$; o en forma explícita con respecto a y cuando se escribe $y=mx+n$ o quizás explícita con respecto a x en forma similar, es decir $x = \dots$

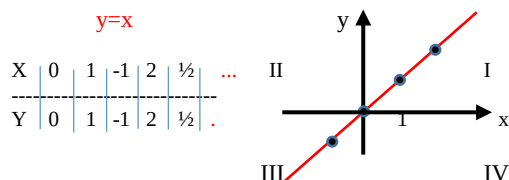
Haciendo explícita la forma implícita tenemos: $by=-ax-c$ obtenemos $y=-(a/b)x-c/b$; comparando esta última expresión con la forma explícita $y = mx+n$ vemos que $m=-a/b$ y $n=-c/b$.

Para comprender la línea recta en geometría analítica, es recomendable tanto derivar teóricamente la ecuación general de ella, como familiarizarse con ejercicios sobre casos particulares.

La forma algebraica más simple es ciertamente la explícita con respecto a y que suele ser la más utilizada al significar y como variable dependiente.

Una línea simple es $y=x$ donde $m=1$ y $n=0$. La recta en cuestión se escribiría $y=1x+0$ y eso es precisamente $y = x$.

Este último escrito dice: la variable dependiente y es igual a x . Por lo tanto numéricamente tendríamos el mismo número para x e y cada vez.



En la red cuadrangular de los puntos $P(x; y)$ en el plano cartesiano, marcamos los puntos $(0,0)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(2; 2)$... ; inmediatamente veremos que están alineados a lo largo de la bisectriz (en rojo) del primer y tercer cuadrante (I y III).

Una ecuación de primer grado se remonta a la forma: $mx + n = 0$.

Como puede ver, la x desconocida aparece aquí solo una vez en un término aislado. La ecuación se resuelve fácilmente asegurándose de que el primer miembro quede solo con la incógnita, solo para construir la oración " x es ..." obteniendo así $x = \dots$

Llevamos n al segundo miembro usando la operación inversa de la suma, es decir restando " n " de ambos miembros:

$$mx + n - n = 0 - n. \text{ Obtenemos } mx = -n$$

Ahora liberamos x del factor m que hay que multiplicar y por tanto dividirá al segundo miembro, obteniendo $x = -n/m$.

Como puede verse, la solución se alcanza mediante un procedimiento relativamente sencillo.

Para dar una representación visual de la misma en el plano cartesiano de las coordenadas (x, y) , observamos que la ecuación de partida no tenía la ordenada y . Por lo tanto, la ecuación, sin el símbolo y , no podría representarse en el plano cartesiano.

Sin embargo, podemos introducirlo en lugar de cero imponiendo la condición $y=0$ que debe ser válida junto con la ecuación inicial.

Por lo tanto, es apropiado representar la ecuación con un **sistema** en el que y aparece tanto en $mx+n=y$ como en $y=0$. Recordando que si $a = b$ entonces $b = a$ (intercambiando los dos miembros de posición) la ecuación $mx+n=y$ se puede reescribir como: $y=mx+n$ ya que y se adapta mejor como sujeto del discurso algebraico ya que aparece ya aislado (a diferencia de x que está vinculado a m).

En esencia, el sistema de las dos ecuaciones antes mencionadas es entonces:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = 0 \end{cases}$$

Resumiendo, el sistema de $y = 0$ con $y = mx + n$, equivale a escribir $0 = mx + n$ que a su vez equivale a $mx + n = 0$. Hemos subsanado así la ausencia original de la ordenada y en la ecuación dado pero ahora sabemos que es equivalente a buscar las intersecciones comunes entre la recta de ecuación $y = 0$ (eje de abscisas) y la recta $y = mx + n$. Recuerde que la ecuación $y = 0$ es verdadera para todos los puntos del eje x y, por lo tanto, este eje puede llamarse la imagen visual de la ecuación misma ($y = 0$ es de primer grado en y).

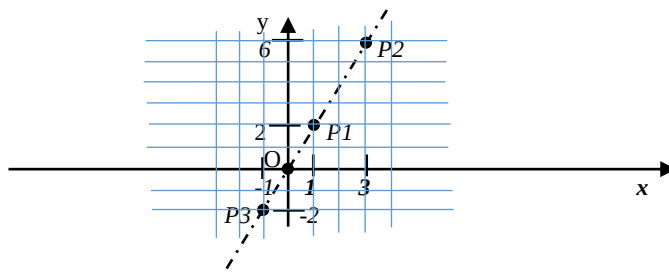
Surge entonces la pregunta: qué corresponde a la ecuación $y = mx + n$. En general, se sabe que esta ecuación corresponde a una línea recta.

En cualquier caso, dado que m y n son parámetros (es decir, cualquier número pero bien determinado cada vez), supongamos que m es 2 y n es *cero*, solo para fijar las ideas con un ejemplo simple.

La ecuación entonces se convierte en $y = 2x$. Tanto x como y son números variables que se pueden elegir al azar siempre que estén vinculados entre sí por la ecuación misma. La ecuación $y = 2x$ dice: "**y es doble x**". Por ejemplo, si $x = 1$ entonces y , que es el doble, debe ser 2 , y así sucesivamente. Si $x = 3$, $y = 6$. Para $x = 0$, $y = 0$. Si $x = -1$, $y = -2$... Así nació la tabla:

x	y	
1	2	P1
3	6	P2
-1	-2	P3
0	0	P4 = O

Tenemos una tabla con pares ordenados de valores de x e y . Sabemos que corresponden a los puntos P1, ... P4. Representémoslos visualmente en un sistema de referencia cartesiano. (La tabla se puede escribir tanto horizontal como verticalmente).

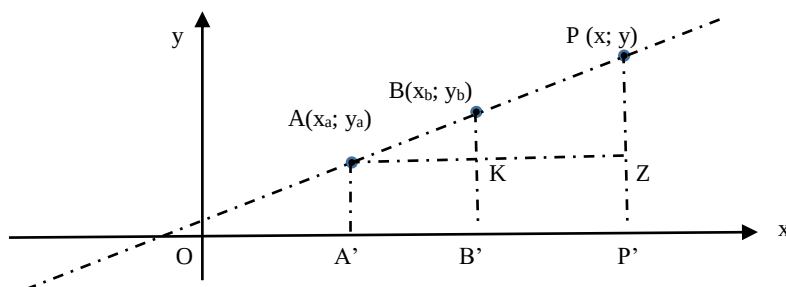


Observamos que los cuatro puntos obtenidos están alineados. Por tanto la ecuación $y = 2x$ aparece representada por una recta que pasa por el origen y convenientemente inclinada de tal forma que y es siempre el doble de x . De hecho, la ecuación $y = 2x$ dice: "**y es doble x**".

En realidad, toda ecuación de primer grado en x e y corresponde a una línea recta en el sentido de que los valores de x e y que satisfacen la ecuación cada vez forman pares de coordenadas que se encuentran sobre una recta bien determinada. Ser seguro en general, es sin embargo necesario dar una demostración que pasamos a exponer.

Ecuación de la recta y posibles expresiones generales en el sistema de referencia cartesiano. Significado angular de m.

En el sistema de referencia cartesiano bidimensional en el que los puntos se identifican con los pares ordenados de números reales x e y , consideramos cualquier línea recta y tres puntos cualquiera sobre ella, obviamente no coincidentes A (x_a ; y_a), B (x_b ; y_b) e P (x ; y).



Desde los puntos A, B y P trazamos las perpendiculares al eje x : estos son naturalmente paralelos entre sí porque todos son perpendiculares a la misma línea que es el eje x y que se encuentran en A', B', P'.

Desde A trazamos la paralela al eje x hasta encontrarnos con el segmento BB' en K y el segmento PP' en Z.

Los dos triángulos ABK y APZ son semejantes porque sus lados están en proporción; de hecho, el ángulo PAZ es el mismo para los dos triángulos; además, los ángulos AKB y AZP son rectos porque están formados por perpendiculares y una paralela a la misma línea que es el eje x .

(Alternativamente, los paralelos AA', BB' y PP' son cortados por las transversales AP y AZ y por tanto los citados triángulos son semejantes para Tales).

Por lo tanto:

$$PZ : BK = AZ : AK$$

Pero considerando el rectángulo AA'P'Z, tenemos:

$$\begin{aligned} PZ &= PP' - ZP' = PP' - AA' = y - y_a \\ BK &= BB' - B'K = BB' - AA' = y_b - y_a \\ AZ &= A'P' = OP' - OA' = x - x_a \\ AK &= A'B' = OB' - OA' = x_b - x_a \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo tenemos: $(y - y_a) : (y_b - y_a) = (x - x_a) : (x_b - x_a)$

$$\frac{(y - y_a)}{(y_b - y_a)} = \frac{(x - x_a)}{(x_b - x_a)}$$

↔ **Ecuación de la recta para dos puntos A y B.**
“es decir, la recta que pasa por los “2 puntos: A y B”

Ahora manipulemos la ecuación para derivar la variable y.

$$(y - y_a) = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)} (x - x_a)$$

Poniendo la fracción de números conocidos igual a m tenemos:

$$(y - y_a) = m (x - x_a) \quad \text{liberando y como sujeto de una oración algebraica, tenemos:}$$

$$y = m (x - x_a) + y_a \quad \text{de donde, liberando también la x, obtenemos:}$$

$$y = mx + y_a - m x_a \quad (\text{es decir } y - mx = y_a - m x_a)$$

como puede verse, el grupo de símbolos $y_a - mx_a$ es un término conocido ya que está formado por números que se suponen conocidos. Por lo tanto, es legítimo igualar todo el grupo a un número conocido “n”, llamado “término conocido n”. La relación entonces se convierte en:

$$y = mx + n$$

↔ **Ecuación explícita con respecto a y de la recta**

Esta es la **ecuación de la recta** en forma **explícita** con respecto a y.

El parámetro **m** se llama **coeficiente angular** (porque determina el ángulo de la recta con respecto a los ejes).

En cambio, el **término conocido n** determina la posición de la línea recta. Mayor o menor dependiendo de su valor.

Sin embargo, la ecuación de la recta es siempre de primer grado tanto en x como en y.

La ecuación de la recta para dos puntos A y B puede hacerse explícita, alternativamente, con respecto a x; en todo caso siempre permanece de primer grado tanto en x como en y.

Si la ecuación inicial no es explícita, es posible llegar a la forma implícita de la línea que se escribe $ax+by+c=0$.

En esta forma explícita, los parámetros a, b, c son números, obviamente, no subíndices, y se denominan "coeficientes", es decir, parámetros multiplicadores de x o y que, en cambio, son variables a voluntad.

$$ax + by + c = 0$$

↔ **Ecuación implícita de la recta**

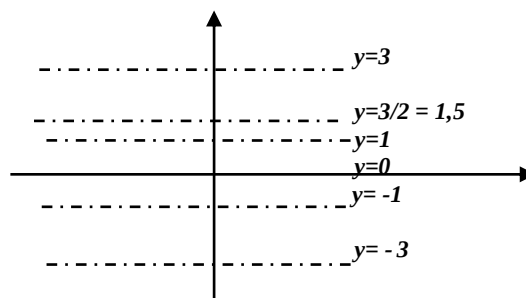
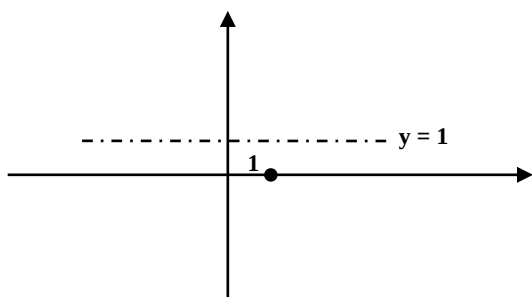
Al hacer explícita esta relación con respecto a y recuperamos su forma explícita: $y = - (a/b)x - c/b$ donde $m = -a/b$; $n = -c/b$.

La forma implícita es útil si desea la ecuación del eje y. Esta ecuación es $x=0$ en el caso particular donde $a=1$, $b=c=0$.

Notemos que la forma implícita es necesaria ya que la ecuación $x=0$ no se puede obtener de la forma explícita con respecto a y.

Ejemplos de rectas. Significado geométrico de n.

Habiendo tenido que proceder con la teoría, corresponde ahora ilustrar algunos ejemplos de líneas que aclararán mejor su significado.



En las figuras podemos ver el significado visual de algunas ecuaciones de primer grado que por tanto representan líneas rectas. A la izquierda, la ecuación $y=1$ debe leerse "y es igual a 1". Debemos preguntarnos cuáles son los puntos en los que esto es cierto, es decir, ocurre.

La respuesta es que esto ocurre en todos los puntos de una línea que tienen una unidad de distancia desde el eje x. Todos estos puntos, tomados en conjunto, están dispuestos en una línea paralela al eje x en la altura uno.

A la derecha tenemos otras ecuaciones representadas por otras tantas líneas discontinuas, excepto $y=0$ que está representada por el eje x (no discontinuo).

Como puede verse, **a medida que aumenta el parámetro n, también aumenta la distancia de la línea correspondiente al eje x**. Todas las ecuaciones son del tipo $y = n$ (n es el término conocido; la ecuación completa en general es $y = mx + n$ pero si no aparece el término mx es porque $m = 0$ entonces $mx = 0x = 0$, por lo tanto no da contribuciones a la suma de $mx+n=0+n=n$).

Nótese que todas las ecuaciones del tipo $y = n$ corresponden a rectas paralelas al eje x.

Si $n < 0$ la recta es una paralela por debajo del eje x.

Si $n = 0$ la línea es par al eje x.

Si $n > 0$ la recta es una paralela por encima del eje x.

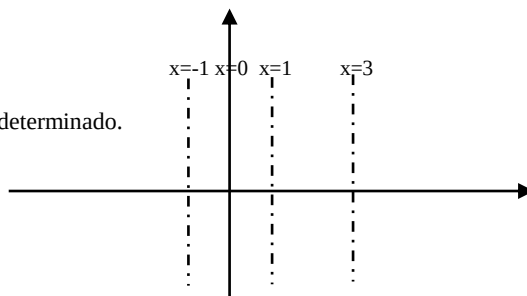
Por supuesto, las paralelas al eje y tienen ecuaciones del tipo $x = k$.

Por supuesto k es un parámetro, es decir, cualquier número pero bien determinado.

Si $k < 0$ la línea es paralela a la izquierda del eje y.

Si $k = 0$ la línea es par al eje y.

Si $k > 0$ la recta es una paralela a la derecha del eje y.



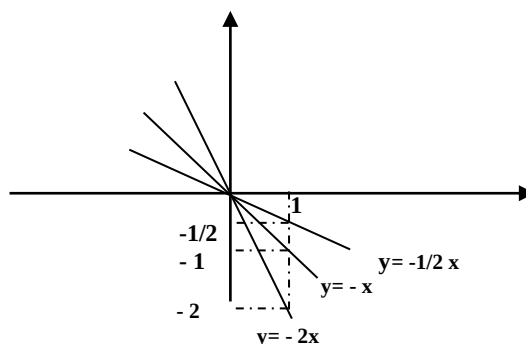
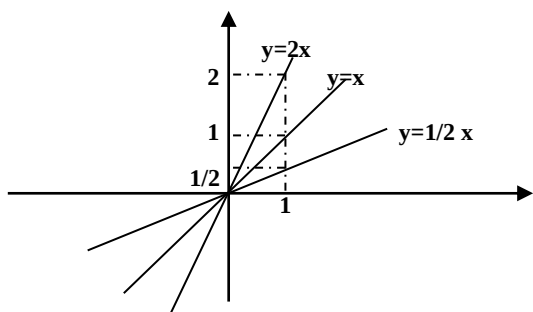
Significado geométrico de m e n.

En la ecuación $y = mx + n$, la letra m se utiliza para indicar el "coeficiente angular" de la recta correspondiente a la ecuación.

En general, en geometría analítica una relación de primer grado corresponde a una línea recta. El coeficiente angular es un número bien determinado, determina el ángulo de la recta con respecto a los ejes x e y. El coeficiente **m** es reconocible ya que por convención debe encontrarse en forma explícita con respecto a y (que es del tipo $y = mx + n$) y debe multiplicar la variable x, no y. Aquí hay unos ejemplos.

Ecuación de la recta	Coficiente angular
$y=3x$	3
$(1/3)y = x \rightarrow y=3x$	3
$2x-3y=0 \rightarrow -3y=-2x \rightarrow 3y=2x \rightarrow y=2/3 x$	2/3
$y=x$	1
$2x-6y+5=0 \rightarrow 2x=6y-5 \rightarrow y=(2/6)x+5/6$	1/3
$x=4/3y \rightarrow y=(3/4)x$	3/4
$y=-x$	-1

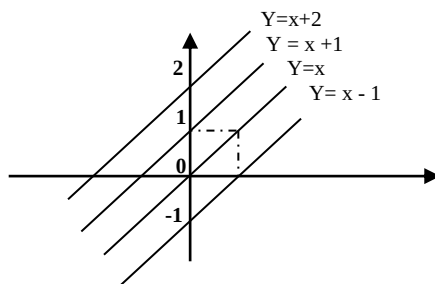
Ahora observa las figuras en las que las inclinaciones de las rectas corresponden a otros tantos coeficientes angulares. Observa por ejemplo que en cada punto de la recta $y = x$ el valor numérico de y es igual al de x, igualmente en la recta $y = 2x$ en cada uno de sus puntos la y es el doble de la x, así sucesivamente.



La recta $y = 2x$ pasa por (1; 2). El $y = x$ para (1; 1). La recta $y = 1/2x$ veces (1; 1/2). El $y = 2x$ dice "y es igual al doble de x". El $y = x$ dice "y es igual a x". El $y = 1/2$ dice x "y es 1/2 de x" o "y es la mitad de x".

La recta $y = -2x$ pasa por (1; -2). El $y = -x$ para (1; -1). La recta $y = -1/2x$ para (1; -1/2). El $y = -2x$ dice "y es igual a menos el doble de x". El $y = -x$ dice "y es igual a menos x". El $y = -1/2 x$ dice "y es 1/2 de menos x" o "y es la mitad de menos x".

En general, si se agrega a la ecuación un término conocido n (con signo $+$ o $-$), la línea representada mantiene su ángulo pero se mueve paralela a sí misma hacia arriba (si n aumenta) o hacia abajo (si n disminuye).



Líneas paralelas o perpendiculares.

En geometría analítica, dos líneas **paralelas** se representan mediante ecuaciones de primer grado que, si se escriben explícitamente con respecto a y , tienen el **mismo valor del coeficiente angular m** (pero difieren solo en el término conocido). Así que tenemos el:

condición de paralelismo: $m_{//} = m$

En geometría analítica, dos rectas **perpendiculares** se representan mediante ecuaciones de primer grado que, si se escriben explícitamente con respecto a y , tienen valores **recíprocos y opuestos para los coeficientes angulares**:

condición de ortogonalidad: $m_{or} = -1/m$

la condición de perpendicularidad también se puede recordar con la fórmula equivalente $mm_p = -1$

Línea con paso por un punto $P_0(x_0; y_0)$.

Dado que una ecuación de primer grado representa una línea recta en el plano cartesiano, puede "pasar" (satisfacerse) por los infinitos puntos que le son propios. En algunos casos podemos querer que una recta indeterminada pase por cierto punto que queremos P_0 . Esta recta puede tener cualquier ángulo con respecto a los ejes de referencia.

Esto significa que la ecuación - obviamente de primer grado - aún debe ser "satisfecha" por las coordenadas (x_0, y_0) del punto mismo. Este será el único punto por donde pase la línea recta con seguridad; de lo contrario, cualquier otro punto es posible.

Todo esto seguramente sucederá si al reemplazar las variables x, y (de la ecuación de la recta) por los valores numéricos x_0, y_0 (coordenadas del punto en cuestión) se mantiene la igualdad.

Esta es la "condición para que la línea recta pase por un punto dado". También puede denominarse "condición de pertenencia del punto a la recta asignada por ecuación de 1er grado".

Sabemos, en general, que una sola línea recta pasa por dos puntos, mientras que ahora nos interesa pasar por un solo punto, no por dos puntos. Entonces la recta queda indeterminada ya que hay infinitas rectas que pasan por un solo punto dado; en este sentido, todos juntos formarán una especie de "estrella" de líneas rectas (llamada convencionalmente "haz propio"). Todas estas líneas posibles, sin embargo, tienen ese punto en común como si fuera "el centro de la estrella".

Sabemos que una recta tiene la ecuación general $y = mx + n$ pero también sabemos que cuando una recta genérica "pasa" por el punto $P_0(x_0; y_0)$, la igualdad $y_0 = mx_0 + n$ se cumpliría. La diferencia entre los dos scripts es que el primero ($y = mx + n$) puede ser satisfecho por cualquier par de valores x, y del plano (siendo m y n indeterminados, incluso si en cualquier momento m y n pueden ser elegido de manera apropiada), mientras que el segundo ($y_0 = mx_0 + n$) solo puede ser satisfecho por el par $(x_0; y_0)$ pero solo uno de los dos parámetros m y n puede elegirse libremente mientras que el otro debe determinarse en consecuencia, resolviendo la ecuación creada.

Podemos pensar entonces que la ecuación $y = mx + n$ representa cualquier recta y , potencialmente, cualquier punto del plano cartesiano hasta el momento en que no se determinen los parámetros m, n y las variables x, y , mientras que la ecuación $y_0 = mx_0 + n$ representa solo un punto aunque genéricamente indica cualquier recta que pasaría por él.

Mientras que la ecuación general $y = mx + n$ representa todas las rectas posibles e imaginables en el plano, por el contrario la ecuación $y_0 = mx_0 + n$ en realidad representa solo el punto $P_0(x_0; y_0)$ dejando libre la imaginación para imaginar cualquier recta que lo atraviesa siendo m y n indeterminados. Por otro lado, las variables x, y no aparecen en la ecuación y por tanto no hay forma de elegir otros puntos que no sean $P_0(x_0; y_0)$.

En este sentido nos gustaría "unir" las dos ecuaciones para tener ambas ventajas (libertad para imaginar la línea y paso por el punto) pero sin introducir una diferencia sustancial entre ellas (el resultado debe seguir siendo una ecuación de primer grado si quieres Una línea recta). Luego los comparamos entre sí. Los escribimos en la forma más conveniente: $y - mx - n = 0$; $y_0 - mx_0 - n = 0$; como queremos que sean compatibles entre sí, verificamos que su diferencia sea cero.

$$\begin{cases} y - mx - n = 0 \\ y_0 - mx_0 - n = 0 \end{cases}$$

Restando miembro de miembro tenemos: $y - mx - y_0 + mx_0 = 0$, es decir, $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Esta ecuación es de primer grado y por lo tanto es una línea recta en las variables x, y . Además, al sustituir las dos coordenadas x_0 e y_0 en lugar de x e y obtenemos $0 = 0$ que es correcto y por lo tanto es cierto que la línea "pasa" por el punto deseado $P_0(x_0; y_0)$. Notamos que " n " ha desaparecido; después de todo, la posición de la línea está determinada por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y ya no por n , mientras que la elección del ángulo queda libre gracias a la presencia del factor angular m .

Con m , indicamos un coeficiente angular paramétrico, que está cualquiera pero bien determinado; utilizando la letra m en lugar de un número particular, indicamos tanto el caso en que el coeficiente es bien conocido numéricamente, como el caso en que el coeficiente queda por determinar. También notamos que al colocar x_0 en lugar de x y también al colocar y_0 en lugar de y , la ecuación inmediatamente se convierte en: $0 = 0$ que es una oración algebraica verdadera y por tanto es cierta su premisa de que la ecuación "es una línea que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ ".

"Recta por un punto" o "recta por un punto"

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

La ecuación generalmente se presenta con símbolos simplemente nominales (es decir, son solo nombres y, por lo tanto, actúan como indicadores), no especificados numéricamente. Es por tanto una fórmula que, como toda fórmula, se presta a muchos y diferentes usos. P. ej. si desea que la línea recta pase por un punto $P_0(x_0; y_0)$ y sea paralela a una línea recta dada cuyo coeficiente angular m se conoce, simplemente sustituya los datos en la fórmula y el problema se resolverá con bastante facilidad. La fórmula es útil, vale la pena recordarla.

Como otro ejemplo, si queremos que la recta pase por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y sea perpendicular a una recta dada, con un coeficiente angular m dado, será suficiente aplicar la fórmula imponiendo -según la condición de perpendicularidad- que el nuevo coeficiente angular es recíproco y opuesto, $-1/m$. Por lo tanto la línea buscada tendrá la ecuación $y - y_0 = (-1/m)(x - x_0)$.

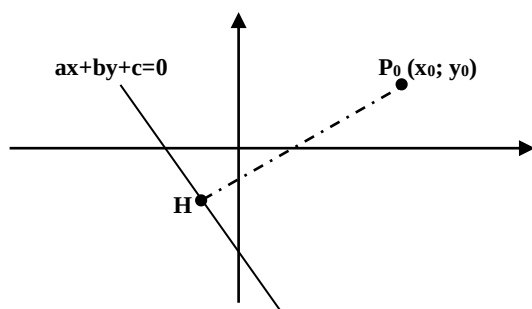
Distancia de un punto a una recta dada.

Hay fórmulas preparadas para resolver este problema. Sin embargo, puede ser útil conocer el procedimiento adecuado para la solución, por ejemplo, cuando no recuerda fórmulas adecuadas para el caso. Esta es también una oportunidad para aplicar los conceptos expuestos anteriormente.

Sea $P_0(x_0; y_0)$ el punto en cuestión: queremos la distancia desde la línea recta que tiene la ecuación implícita $ax + by + c = 0$.

Si preferimos fórmulas en forma explícita, entonces es mejor explicar la ecuación de la recta con respecto a y :

obtenemos $y = -(a/b)x - c/b$ donde el coeficiente angular es $m = -(a/b)$. El coeficiente angular de la perpendicular es entonces b/a ya que debe ser el recíproco y tener signo opuesto.



Al tener que encontrar la distancia entre H y P_0 , sabemos que el segmento P_0H debe evaluarse en la perpendicular de P_0 a la línea dada. Aplicando a la vez la condición de paso por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y la condición de perpendicularidad a la línea conocida, tenemos:

$y - y_0 = (b/a)(x - x_0)$. Para encontrar las coordenadas del punto $H(x_H; y_H)$ que es la intersección de las dos líneas, basta entonces con imponer el sistema a las dos ecuaciones correspondientes a las dos mismas líneas.

$$\begin{cases} y - y_0 = (b/a)(x - x_0) \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

El sistema, una vez resuelto, proporcionará las soluciones del punto $H(x_H; y_H)$. Bastará entonces calcular la distancia $d = P_0H$ con la fórmula pitagórica de la distancia:

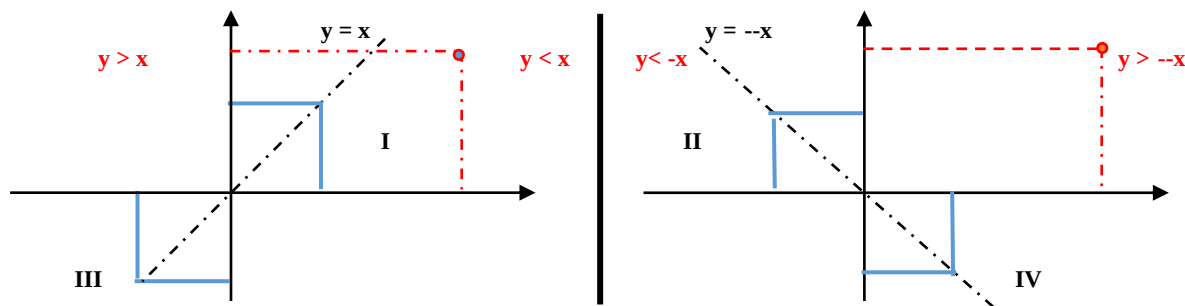
$$d = \sqrt{(x_0 - x_H)^2 + (y_0 - y_H)^2}$$

Este método es bastante conveniente porque se basa en el razonamiento. También existe una fórmula que proporciona directamente la distancia de un punto P_0 a una recta dada de forma implícita (de ahí, sustituyendo los coeficientes correspondientes, también tenemos la fórmula análoga válida para la recta dada de forma explícita). La fórmula establece que necesitamos reemplazar las coordenadas de P_0 en la ecuación de la línea y usar el módulo - es decir $|ax_0 + by_0 + c|$ - y luego dividir el resultado por $\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bisectrices de los ejes. Desigualdades.

Observamos que el plano cartesiano tiene cuatro cuadrantes (I, II, III, IV). Las bisectrices de los ejes son evidentemente dos. Uno se extiende en el primer y tercer cuadrante (figura de la izquierda), el otro en el segundo y cuarto cuadrante (figura de la derecha).



Consideremos ahora la ecuación $y = x$; es una oración algebraica que se puede leer "y es igual a x" o: "y, x son iguales entre sí": pero ¿dónde y cuándo? Descartes responde virtualmente: "pruébalo en el plano del sistema de referencia cartesiano". Sin embargo, en el plano cartesiano de la figura de la izquierda es inmediatamente evidente que cada punto de la bisectriz del I y III cuadrante corresponde biunívocamente a un par ordenado de números reales x, y iguales entre sí. Esta igualdad está resaltada por los segmentos azules en la figura de la izquierda.

El segmento horizontal azul representa un valor correspondiente de x (por ejemplo, $x = 3$). El segmento azul vertical representa el valor de y (ya que es una bisectriz que corta el primer cuadrante en dos partes iguales); es claro que -al ser una bisectriz- debe tener la misma longitud que el segmento azul horizontal: (por lo tanto también $y = 3$).

Ahora considere cualquier otro punto en la línea $y = x$ en el tercer cuadrante (nuevamente en la figura de la izquierda).

Aquí, si $x = -3$ entonces (dada la igualdad recíproca deseada por la ecuación) debe ser y también es (como puede verse) $y = x = -3$.

En el origen naturalmente tenemos $x = y = 0$ y por lo tanto también en el origen x e y son iguales entre sí ya que ambos son nulos.

Entonces, la ecuación $y = x$ está representada por la bisectriz completa de los ejes cartesianos que pasan por el origen y cruzan el I y el III cuadrante. Por el contrario, la bisectriz antes mencionada corresponde a la ecuación $y = -x$.

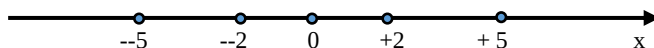
Por lo tanto, podemos concluir que una ecuación ciertamente puede corresponder a una figura en el plano cartesiano y se convierte así en su "ilustración".

Ahora intentemos reemplazar el signo igual (=) con el signo desigual. Tendremos dos posibles desigualdades diferentes.

Uno será $y > x$ y el otro será $y < x$.

También notamos que en todo el semiplano **debajo** de la bisectriz (correspondiente a $y = x$), resulta $x > y$ (léase: "x mayor que y"), una desigualdad que es equivalente a $y < x$ (es decir, "y menor que x").

En general, tenga en cuenta que si intercambia los dos lados de una desigualdad, la dirección de > cambia a < (y viceversa). Entonces si $5 > 2$, entonces $2 < 5$. Si cambiamos los signos de los dos miembros tendríamos que de $5 > 2$ pasaríamos a $-5 < -2$; por lo tanto, cambiar el signo de los dos miembros cambia la dirección de la desigualdad como se muestra en el siguiente esquema gráfico; este también es un sistema de referencia cartesiano pero unidimensional (solo una dimensión porque usamos solo una línea recta).



La figura muestra que las desigualdades entre números negativos pueden parecer opuestas a aquellas entre números positivos, pero esto se explica inmediatamente. Si solo nos faltan dos objetos en lugar de cinco, es ciertamente mejor en el sentido de que tenemos más si solo nos faltan dos en lugar de cinco. De ahí la necesidad de mantener la coherencia con la dirección positiva establecida por la dirección positiva (flecha derecha) colocando -5 a la izquierda de -2; por convención, establecida por la dirección positiva elegida con la flecha, el número a la derecha de otro es, por lo tanto, siempre mayor. Como debe ser $+5 > +2$ también es correcto que sea $-5 < -2$ y por lo tanto -5 está a la izquierda de -2.

(¡Tienes más tazas en un servicio de té si no te falta ninguna (cero), solo una o solo dos... en vez de cinco!).

Ahora notamos que en el semiplano por encima de la bisectriz hay $y > x$ como se puede verificar fácilmente trazando las coordenadas de cualquier punto del mencionado semiplano.

La figura de la derecha considera la bisectriz de los ejes cartesianos que pasa por el origen y corta por la mitad el segundo (II) y el cuarto (IV) cuadrante. Basta un momento de reflexión para darse cuenta de que las dos coordenadas tienen siempre signo contrario para cada punto de esta bisectriz que en realidad está caracterizada por la ecuación $y = -x$ que se lee como sigue: "en los puntos del plano cartesiano, la dos coordenadas x y y -presentes en la ecuación- son iguales pero de signo opuesto".

Esta relación está resaltada por los segmentos azules en la figura de la derecha.

En cualquier punto de la bisectriz, un segmento horizontal azul representa un valor correspondiente de x (por ejemplo, $x = 3$). El segmento azul vertical que parte del mismo punto representa el valor de y que debe tener la misma longitud que el segmento azul horizontal, pero debe representar el signo contrario, en este caso negativo: (por lo tanto será $y = -3$). Por lo tanto, la ordenada y (negativa) se traza debajo del eje x .

Por el contrario, si $x = -3$, entonces $y = +3$.

Por supuesto si $x = 0$ también $y = 0$.

La ecuación $y = -x$ naturalmente nos permite considerar las dos desigualdades: $y > -x$; $y < -x$.

Con respecto a estas dos desigualdades, la ecuación $y = x$ es como si fuera su línea divisoria de aguas en el sentido de que está en una posición intermedia.

Estas tres relaciones se pueden poner en forma implícita y convertirse en $x+y > 0$, $x+y < 0$ y finalmente $x+y = 0$ que, ordenadas de la siguiente manera, muestran su relación recíproca:

$$\begin{aligned}x + y &> 0 \\x + y &= 0 \\x + y &< 0\end{aligned}$$

Notemos que en el semiplano **arriba** de la bisectriz $y = -x$ resulta $y > -x$ como se puede comprobar fácilmente trazando las coordenadas de cualquier punto de dicho semiplano como en la figura. En el semiplano **debajo** de la bisectriz $y = -x$, tenemos $y < -x$.

Ecuación de la circunferencia.

La capacidad de calcular la distancia entre dos puntos A y B le permite derivar la ecuación cartesiana de la circunferencia considerando la "ley de la circunferencia".

Todos los puntos de la circunferencia "obedecen" o "verifican" la misma ley que para todos es la equidistancia de un punto fijo llamado centro. Esta es la ley geométrica del lugar.

Cuando cualquier figura puede ser descrita u obtenida de otro modo, por medio de una ley geométrica a la que obedecen todos sus puntos, entonces hablamos de un **lugar geométrico de los puntos**. Cuando se describe con números entonces **la ley es analítica**.

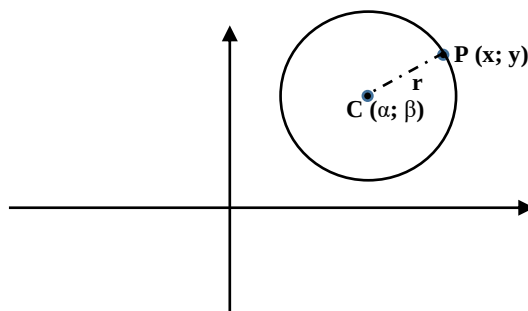
Entonces, la ley de la circunferencia es simplemente **$PC = r$** , donde P es cualquier punto de la circunferencia; C es un punto fijo llamado centro de la circunferencia; r es la medida del radio.

Estamos de acuerdo en que α y β son las coordenadas del punto fijo C (α ; β).

La ley de la circunferencia impone: $PC = r$.

Eso es $PC^2 = r^2$.

Queriendo aplicar la fórmula de la distancia al cuadrado tenemos: $PC^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$



Al desarrollar la expresión $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

$$\begin{aligned}\text{Tenemos: } x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 &= r^2 \\x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 &= 0 \\x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 &= 0\end{aligned}$$

Ordenados por el grado de las variables x , y tenemos:

$$\begin{aligned}\text{digamos: } a &= -2\alpha \\b &= -2\beta \\c &= \alpha^2 + \beta^2 - r^2\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Ecuación de la circunferencia.

Así vemos que la ecuación de la circunferencia también se caracteriza por tres parámetros a , b , c como la ecuación implícita de la recta, pero es diferente porque ambas variables aparecen cada una al cuadrado y con el mismo coeficiente unitario. Por lo tanto, podemos concluir que **diferentes figuras geométricas corresponden a ecuaciones de diferentes formas.**

Algunos posibles significados geométricos particulares derivados de los parámetros en la ecuación de la circunferencia.

Observamos que los parámetros a , b , c deben tener un significado característico para cada uno de ellos, ya implícito en las igualdades establecidas como p. ex. $a = -2\alpha$

Para simplificar, examinémoslos uno por uno observando qué ocurre cuando desaparecen, es decir, cuando uno o más son nulos.

Empezamos a hacer desaparecer el parámetro c igualándolo a cero.

Entonces la ecuación queda así: $x^2 + y^2 + ax + by = 0$

Inmediatamente observamos que esta ecuación se cumple ciertamente para $x = y = 0$: se sigue que un punto en la circunferencia es el origen mismo $(0; 0)$ y por lo tanto la circunferencia pasa por el origen.

Supongamos que tomamos en consideración el eje x que, como sabemos ahora, tiene la ecuación $y = 0$ e imponemos esta frase algebraica en la ecuación de la circunferencia particular que estamos considerando. Imponer la condición significa colocar las dos ecuaciones como un "sistema" ya que estamos asumiendo que, en nuestro caso, ambas deben cumplirse. Entonces debemos usar la llave que indica la contemporaneidad de las dos ecuaciones en el sentido de que las variables x , y son las mismas en las dos ecuaciones que allí aparecen. Asumimos que $c = 0$ y por lo tanto falta el parámetro c en la circunferencia. Por lo tanto:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Teniendo que respetar la condición $y = 0$ ponemos el valor nulo de y también en la primera ecuación y obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 0^2 + ax + b0 &= 0 \text{ eso significa:} \\ x^2 + ax &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente resaltando x ya que tenemos:

$$x(x + a) = 0$$

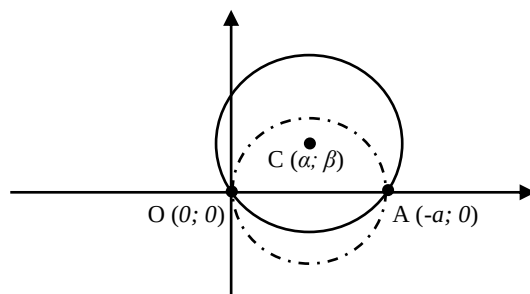
Esta oración algebraica establece que el producto de x por $(a + x)$ es nulo, pero esto solo puede suceder cuando uno de los dos factores es nulo, es decir, cuando $x = 0$ o cuando $x + a = 0$, es decir, cuando $x = -a$.

Todo esto sucede en el caso supuesto para y que es para $y = 0$.

En el plano cartesiano esto significa que tenemos algunos puntos posibles $(x; y)$ que satisfacen el sistema examinado: son los puntos con coordenadas $O(0; 0)$ que es el origen; también un punto en el eje x que tiene abscisa $-a$, es decir, el punto $A(-a; 0)$. La circunferencia considerada al inicio fue $x^2 + y^2 + ax + by = 0$.

Vale la pena señalar que si el P. ex. $a = -3$ entonces $-a = +3$. Hay infinitos círculos posibles que pasan por O y A (ver uno en línea discontinua). Recordando que $a = -2\alpha$, que $b = -2\beta$ podemos determinar las coordenadas del centro y luego decidir cuál es la circunferencia de nuestro caso. De hecho, de las relaciones que acabamos de decir podemos deducir: $\alpha = -a/2$, $\beta = -b/2$. Estas relaciones permiten encontrar las coordenadas del centro C y decidir cuál es la circunferencia buscada, correspondiente a la ecuación dada de la circunferencia. Las relaciones de los parámetros a , b , c , determinan completamente la circunferencia. Repetimos que son:

$$\begin{aligned} a &= -2\alpha \\ b &= -2\beta \\ c &= \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{aligned}$$

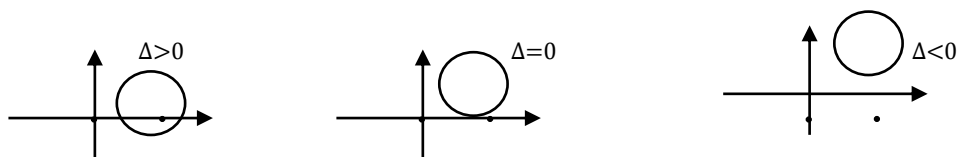


Supongamos ahora que $a = 0$. Esto significa inmediatamente - en virtud de las relaciones anteriores - que $\alpha = 0$; por lo tanto el centro C de la circunferencia estaría en el eje y . En consecuencia, el punto A debe encontrarse en el origen O . La ecuación de la circunferencia se convertiría de hecho en $x^2 + y^2 + by = 0$ que para $x = 0$ se resuelve por $y^2 + by = 0$ es decir, $y(y + b) = 0$ eso es de $y = 0$, y también de $y = -b$.

Entonces la circunferencia estaría en una posición simétrica con respecto al eje y , pasaría por el origen $(0; 0)$ y por el punto $(0; -b)$ en el eje y . El lector trata de escribir la ecuación y dibujar un posible círculo con centro $C(\alpha; \beta)$ en la bisectriz $y = x$.

Intersecciones de la circunferencia con el eje x.

Están dados por el sistema formado por la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+ax+by+c=0$ y por la ecuación del eje x que es $y = 0$. Explotando la relación $y = 0$ reemplazándola en la ecuación de la circunferencia, obtenemos $x^2+ax+c=0$ que admite las soluciones $x = [-a \pm \sqrt{\Delta}] / 2$ donde, en el caso de la circunferencia, $\Delta = a^2-4c$.



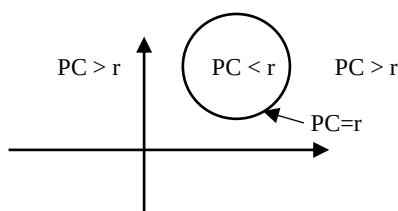
La circunferencia determina tres zonas en el plano.

La ley geométrica a la que obedecen todos los puntos en el plano de la circunferencia es que su distancia r a un punto fijo llamado centro C es constante para todos, es decir $PC = r$. Como resultado, se determinan tres zonas diferentes en el plano.

La zona en la que dicha distancia es mayor a la establecida y que es la zona "externa" en la que resulta $PC > r$.

La zona en la que dicha distancia es exactamente igual a la establecida y que es la zona "frontera" en la que resulta $PC = r$.

La zona en la que dicha distancia es menor a la establecida y que es la zona "interna" en la que se encuentra $PC < r$.



Lugar geométrico. Las cónicas de Apolonio.

Dijimos que un lugar geométrico es un conjunto de puntos que obedecen todos a la misma ley.

Un ejemplo de lugar geométrico es la circunferencia ya que todos sus puntos son equidistantes de un punto fijo llamado centro y todos se encuentran sobre un plano (formarían una esfera si fueran puntos en el espacio tridimensional).

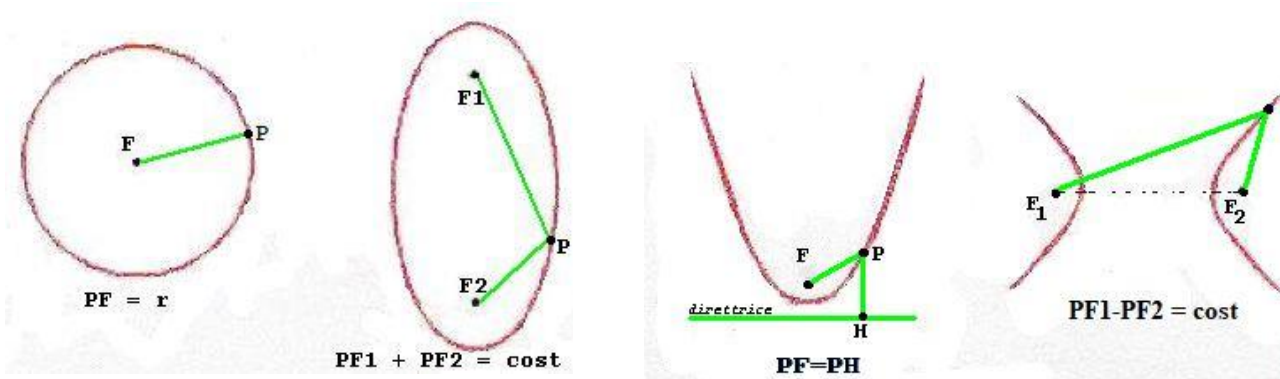
La ley de un lugar geométrico puede darse como una propiedad cuantitativa (como en la circunferencia en la que la distancia de un punto al centro es siempre la misma) o también como una forma en el espacio gracias a un método de construcción como en las cónicas, *curvas obtenidas de la intersección de un cono con un plano*.

Un antiguo matemático, Apolonio, estudió las "curvas cónicas", llamadas así porque se obtenían de la intersección de un plano con un doble cono infinito. Encontró que había cuatro curvas posibles: **circunferencia, elipse, parábola, hipérbola**.

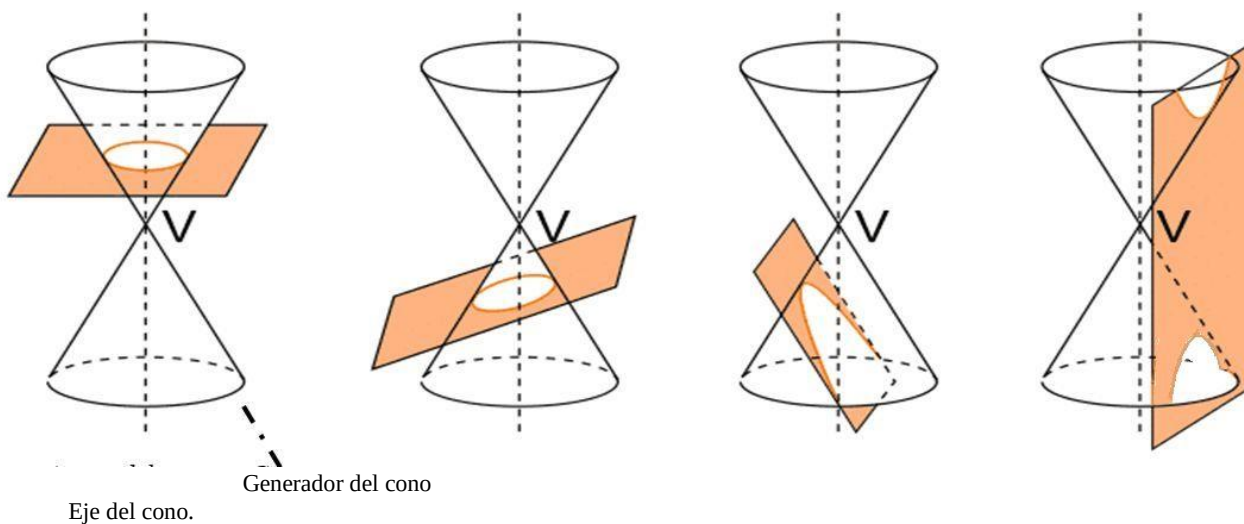
El cono de Apolonio se obtiene girando una línea g , llamada **generatriz**, con un ángulo constante alrededor de otra línea llamada **eje a** del cono. De esta forma se obtiene un doble cono infinito.

Las curvas anteriores se denominan "cónicas": se describen mediante ecuaciones de segundo grado y constituyen las trayectorias de todos los cuerpos celestes. La Luna alrededor de la Tierra describe una circunferencia, los planetas giran en elipses alrededor del Sol, una fosa lanzada sobre la tierra describe una trayectoria parabólica y los cometas describen trayectorias hiperbólicas.

Estas son curvas extremadamente importantes. Son cuatro tipos de lugares geométricos y por tanto están definidos por leyes específicas a las que obedecen todos sus puntos. Enumeramos nombres y leyes métricas ilustradas por figuras correspondientes.



- **Circunferencia.** Colocar en un plano de puntos P equidistantes de un punto fijo F llamado "centro".
- **Elipse.** Puntos P de un plano cuya suma de las distancias **PF1+PF2** a dos puntos fijos llamados **F1, F2** "focos" es constante.
- **Parábola.** Situada en un plano de puntos P equidistantes de un punto fijo llamado "foco" F y de una recta llamada "directriz" **PF=PH**.
- **Hipérbola.** Puntos P de un plano cuya **PF1-PF2** entre las distancias a dos puntos fijos llamados "focos" **F1, F2** es constante.



Circunferencia
Plano perpendicular al eje del cono

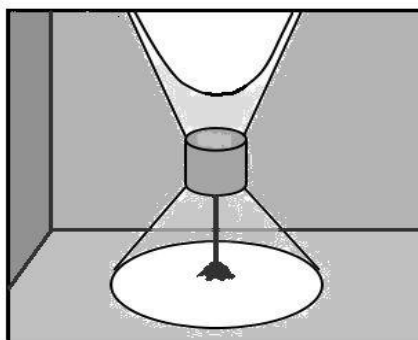
Elipse
Plano oblicuo

Parábola
Plano paralelo a la generatriz

Hipérbola
Plano oblicuo entre el eje y el generatriz del cono.

*Definición de curvas cónicas por métodos de construcción con interacción de figuras geométricas más simples.
En las figuras, las curvas cónicas son visibles como líneas curvas en los planos que cortan el cono.*

Las curvas cónicas se pueden observar fácilmente con la ayuda de una lámpara eléctrica con pantalla, que tiene aberturas circulares, proyectando los haces de luz cónicos en la pared (por ejemplo, parábola o hipérbola) o en el suelo (por ejemplo, circunferencia o elipse). De pared y de suelo se puede accionar la sección adecuada del cono de luz doble (que tendrá distinta apertura angular según la posición de la bombilla en la pantalla). La pared y el suelo pueden crear la sección adecuada del doble cono de luz (que tendrá una apertura angular diferente según la posición de la bombilla en la pantalla).



La ecuación de segundo grado y su visualización realizada en el plano cartesiano. Paquetes de líneas rectas.

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ contiene una sola variable x (la incógnita se considera variable hasta que se conoce su valor) mientras que el plano cartesiano bidimensional se inventó para dos variables.

Por tanto, la ecuación de segundo grado no es directamente representable en el plano cartesiano. Sin embargo, notamos que parece ser un trinomio igual a cero y que sería representable si fuera por ej. igualado a y.

En este punto podemos pensar en igualar el trinomio a y; *simultáneamente* igualar y a cero escribiendo $y = 0$. La necesidad de **contemporaneidad** puede expresarse mediante el símbolo "**sistema**" (abrazadera) que obliga a la validez simultánea de los supuestos contenidos en él incluidos dentro de la llave del sistema.

Debemos escribir que debe ser $y = 0$ y también que debe ser $ax^2 + bx + c = y$ o $y = ax^2 + bx + c$. Por lo tanto:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

De esta forma, **el sistema es equivalente a la ecuación inicial de segundo grado.**

La ecuación de segundo grado en x corresponde a una curva llamada "parábola".

Es una "curva cónica" que se asemeja a una U cuyas dos partes van hacia el infinito. El eje de la curva es paralelo al eje y . La segunda ecuación del sistema ($y=0$) es la ecuación del eje x en la que la ordenada siempre es cero. El sistema se satisface cuando ambas ecuaciones se satisfacen simultáneamente. Esto solo sucede en los puntos de intersección de la parábola con el eje x .

Resolviendo el sistema obtenemos las dos soluciones x_1, x_2 que dependen de Δ como ya se ha visto.

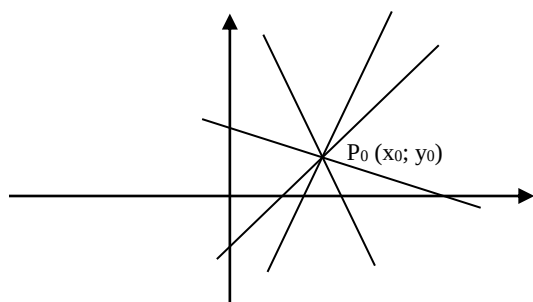
La parábola se describe punto por punto por la primera ecuación. El eje x está descrito por la segunda ecuación $y = 0$.

Recuerde que las soluciones son intersecciones de la parábola con el eje x ; estas soluciones son reales y distintas solo si el "delta" $\Delta > 0$; son reales pero coincidentes si $\Delta = 0$; son complejos conjugados (por lo tanto no reales) si $\Delta < 0$.

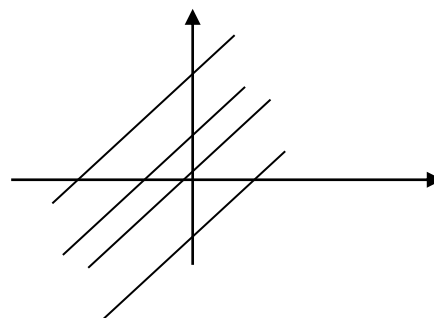
El parámetro " a " corresponde y determina la apertura cóncava de la parábola. El parámetro " b " determina la posición del eje de la parábola. Finalmente, el parámetro " c " determina la intersección de la parábola con el eje y .

Como curiosidad, la parte de primer grado incluida en la ecuación, junto con y , es decir $y = bx + c$, representa la recta tangente a la parábola en el punto de intersección de la parábola con el eje y . Para demostrar esto, escribe la ecuación de la recta genérica que pasa por el punto $(0; c)$ que es el punto del eje y atravesado por la parábola. Escrita explícitamente, esta línea genérica tiene la ecuación $y = mx + c$ (en la que, al sustituir $x = 0$, obtenemos $y = c$). La ecuación se obtiene fácilmente a partir de las coordenadas de C escribiendo $y - c = m(x - 0)$, es decir $y - c = mx$ y finalmente $y = mx + c$.

La ecuación escrita puede considerarse "**ecuación de la viga propia de rectas que pasan por el punto $C(0; c)$** ". La definición de haz de rectas es "conjunto de rectas que pasan todas por el mismo punto". Por definición se dice entonces que el haz de líneas rectas es **propio** si el punto tiene una posición determinada en el plano cartesiano. Se dice que el haz es **impropio** si el punto en cuestión está en el infinito, en cuyo caso el haz está formado por líneas todas paralelas entre sí (se supone -o al menos se dice- que se encuentran en el infinito).



Haz propio: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

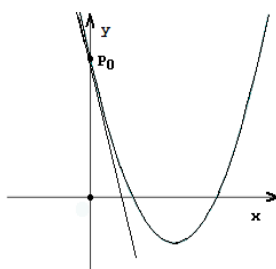


Haz impropio $y = mx + k$.

K es el parámetro que, una vez elegido, identifica la línea correspondiente al valor así decidido.

Volviendo al problema de la tangente, luego escribe el sistema entre la parábola y la recta, ambas pasando por $C(0; c)$, punto también llamado indistintamente P_0 , imponiendo que la delta sea cero de modo que las dos soluciones coincidan y finalmente se encontrará que esto sucede solo para la recta de la viga que tiene ecuación $y = bx + c$.

El ejercicio se deja al lector. Se notará entonces que esta línea no es otra que *la parte que no es de segundo grado* de la ecuación de la propia parábola inicial.



Parábola y tangente en $C = P_0$

Así vemos que la geometría analítica es capaz de mostrarnos muchos y diferentes significados del símbolo algebraico - incluso en alternativas igualmente válidas - que de otro modo podrían parecer ocultos, abstrusos o misteriosos.

Índice

Introducción y notas históricas.....	1
Sistema de referencia unidimensional.....	1
Sistema de referencia bidimensional. Coordenadas de un punto.	2
Los cuatro cuadrantes del plano de referencia cartesiano. Ecuaciones de los ejes cartesianos.....	3
Sistema de referencia tridimensional	3
Ejes oblicuos.....	3
Distancia en el plano cartesiano.	4
Coordenadas del punto medio de un segmento en el plano cartesiano.....	4
Un principio lógico fundamental en álgebra. Manipulación de una igualdad	5
Escala de operaciones.....	5
Grado de una ecuación.....	6
Solución algebraica de la ecuación de segundo grado. Discriminante. Los números imaginarios. Número complejo.....	6
Valor central de las dos soluciones de la ecuación de segundo grado.....	9
La línea. La ecuación de primer grado es la ecuación de una recta. vista cartesiana.	9
Ecuación de la recta y posibles expresiones generales en el sistema de referencia cartesiano. Significado angular de m.	11
Ejemplos de rectas. Significado geométrico de n.	12
Significado geométrico de m e n	13
Líneas paralelas o perpendiculares.	14
Línea con paso por un punto $P_0(x_0; y_0)$	14
Distancia de un punto a una recta dada.....	15
Bisectrices de los ejes. Desigualdades.....	16
Ecuación de la circunferencia.....	17
Algunos posibles significados geométricos particulares derivados de los parámetros en la ecuación de la circunferencia.	18
Intersecciones de la circunferencia con el eje x.....	19
La circunferencia determina tres zonas en el plano.....	19
Lugar geométrico. Las cónicas de Apolonio.....	19
La ecuación de segundo grado y su visualización realizada en el plano cartesiano. Paquetes de líneas rectas.....	20